

## XIV - Les antennes cornets

\*\*\*\*\*

Si l'on souhaite faire rayonner en espace libre une onde électromagnétique guidée par un guide d'onde rectangulaire par exemple, une idée simple consiste à proposer de laisser l'extrémité du guide ouverte, permettant ainsi à l'énergie électromagnétique de se propager librement dans l'espace (Figure XIV-1).

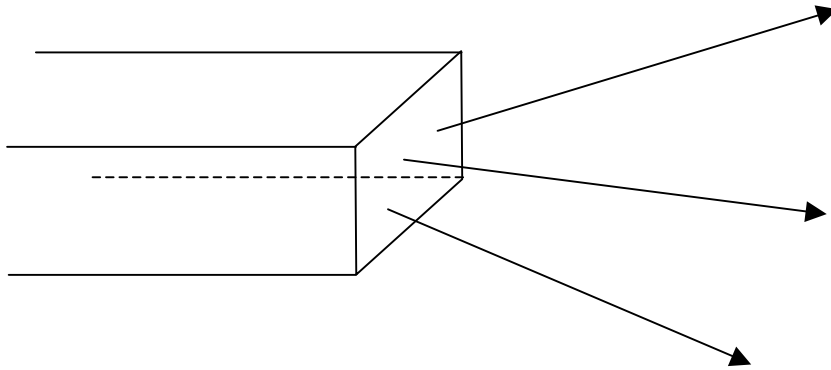


Figure XIV-1 : *Onde électromagnétique s'échappant d'un guide ouvert.*

Si on procède de cette manière, on constate qu'une fraction très faible de l'énergie incidente sur l'ouverture est rayonnée, tandis que la majeure partie est réfléchie à l'ouverture du guide. Ce phénomène peut être analysé en comparant les impédances d'onde du guide et de l'espace libre qui sont très différentes : il existe donc à l'extrémité ouverte du guide une rupture d'impédance qui conduit à la réflexion de la quasi totalité de l'énergie incidente (la condition aux limites sur un circuit ouvert conduit dans le cas idéal à une réflexion totale).

Pour atténuer ce phénomène, l'idée la plus simple consiste à prévoir une zone de transition entre le guide et l'espace libre : en augmentant progressivement les dimensions du guide, on se rapproche des conditions de propagation en espace libre, et la transition avec l'espace libre se fera plus naturellement : on réalise ainsi une antenne cornet (Figure XIV-2).

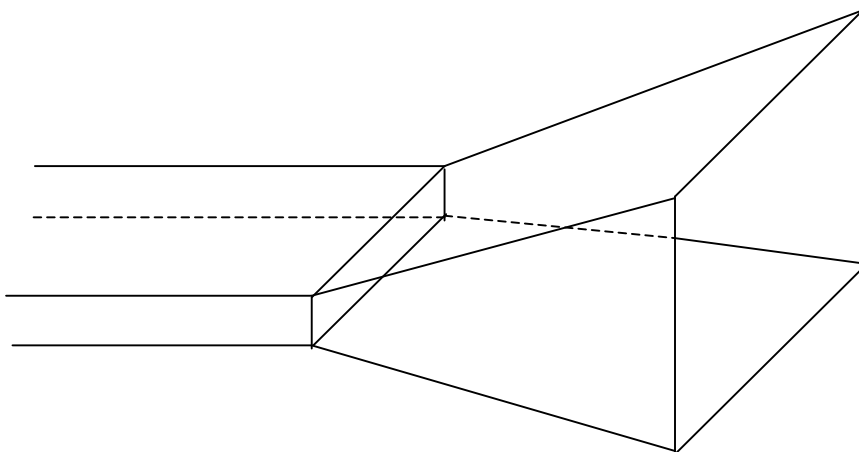


Figure XIV-2 : *Cornet obtenu en augmentant progressivement les dimensions du guide.*

Bien que de conception relativement ancienne, les antennes cornets sont encore largement utilisées de nos jours dans le domaine des microondes, en particulier dans les bases de mesures, les sources primaires des réflecteurs paraboliques, mais également dans des applications qui requièrent une large bande passante.

Les principales qualités de ce type d'antenne sont la pureté de polarisation qui permet son utilisation pour caractériser la polarisation d'autres antennes, sa large bande passante (comparée aux antennes résonnantes), et son gain important.

Le principal défaut est son encombrement et son poids.

L'étude analytique du fonctionnement de ces antennes se fait en deux étapes :

- Détermination du champ électromagnétique présent dans l'ouverture du champ du cornet.
- Détermination du champ rayonné par application du principe d'équivalence.

## **I – Calcul du champ électromagnétique dans l'ouverture**

L'analyse de la propagation dans le guide pyramidal se fait en deux étapes : propagation dans un cornet sectoriel plan H et propagation dans un cornet sectoriel plan E. Ces deux types de propagation sont supposées découplées, et la propagation dans un cornet pyramidal est obtenue en combinant les deux.

Les dimensions du guide rectangulaire qui précède le cornet doivent être calculées de telle manière que seul le mode fondamental se propage aux fréquences de fonctionnement choisies, et nous ferons donc l'hypothèse que la répartition du champ électrique à la transition entre le guide rectangulaire et le guide pyramidal est telle que représenté sur la figure XIV-3.

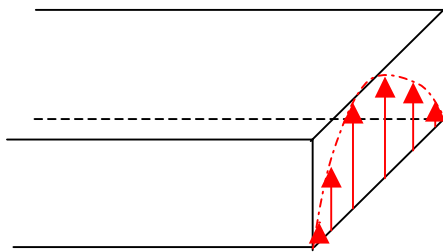


Figure XIV-3 : *Représentation du champ électrique à la sortie du guide rectangulaire sur le mode fondamental.*

### **I-1 Le cornet sectoriel plan H**

Pour ce cornet, seuls les deux parois du guide pyramidal situées dans le plan H vont aller en s'évasant. Les deux autres, situées dans le plan E, restent parallèles (Figure XIV-4).

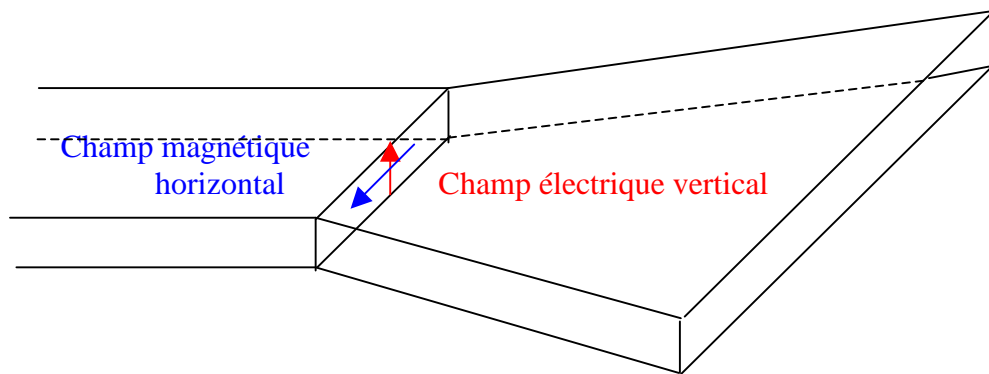


Figure XIV-4 : *Cornet sectoriel plan H*

Les repères cartésien et polaire utilisés, ainsi que les cotes du cornet sont représentés sur les deux figures suivantes :

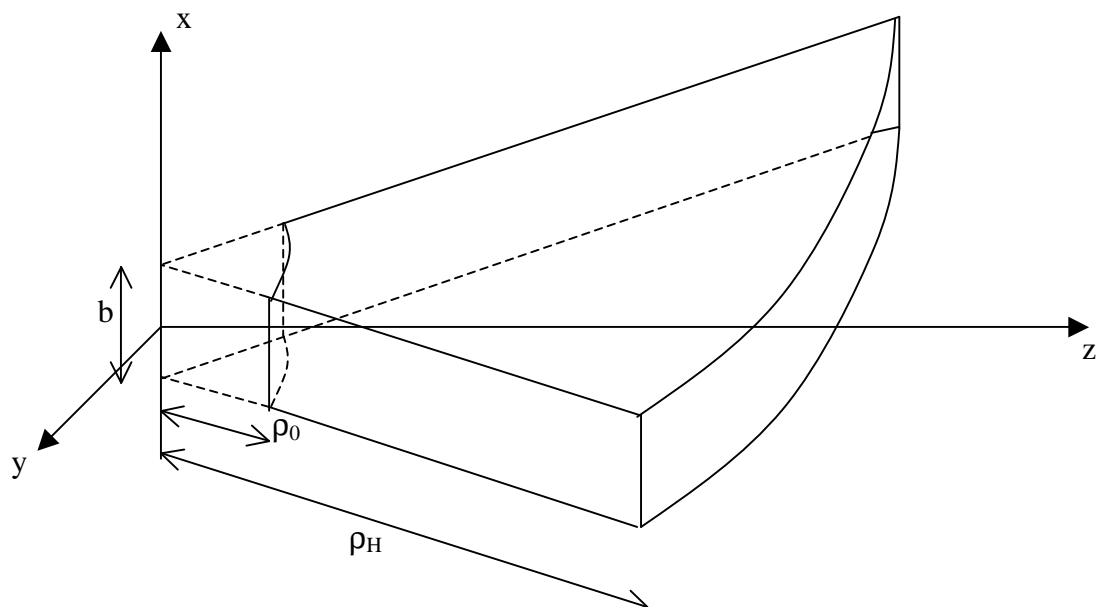


Figure XIV-5 : *Repère cartésien  $(x, y, z)$  associé au cornet sectoriel plan H*

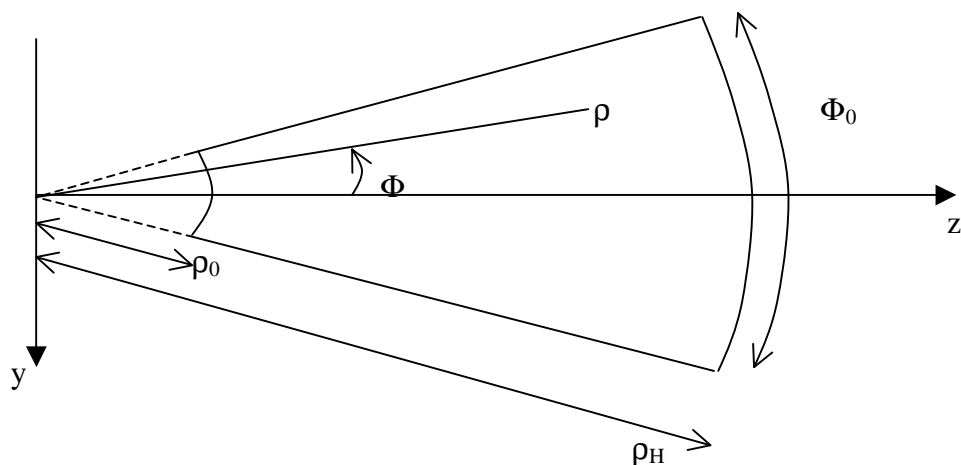


Figure XIV-6 – *Repère cylindrique  $(\rho, \Phi, x)$  associé au cornet sectoriel plan H*

Dans le repère cylindrique (  $x, \rho, \Phi$  ), les équations de MAXWELL en régime harmonique prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 j\omega\epsilon\rho E_x &= \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_\Phi) - \frac{\partial}{\partial\Phi}(H_\rho) \\
 j\omega\epsilon\rho E_\rho &= \frac{\partial}{\partial\Phi}(H_x) - \frac{\partial}{\partial x}(\rho H_\Phi) \\
 j\omega\epsilon E_\Phi &= \frac{\partial}{\partial x}(H_\rho) - \frac{\partial}{\partial\rho}(H_x) \\
 -j\omega\mu\rho H_x &= \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E_\Phi) - \frac{\partial}{\partial\Phi}(E_\rho) \\
 -j\omega\mu\rho H_\rho &= \frac{\partial}{\partial\Phi}(E_x) - \frac{\partial}{\partial x}(\rho E_\Phi) \\
 -j\omega\mu H_\Phi &= \frac{\partial}{\partial x}(E_\rho) - \frac{\partial}{\partial\rho}(E_x)
 \end{aligned}
 \tag{XIV-1}$$

Un grand nombre de solutions peuvent être développée pour le système (XIV-1), et chacune d'elles dépend des conditions imposées au problème.

Dans la situation qui nous préoccupe, nous avons fait l'hypothèse que seul le mode fondamental était présent en sortie du guide rectangulaire, et donc en entrée du guide pyramidal.

Suivant la figure (XIV-5), le champ électrique ne possède donc qu'une composante suivant  $Ox$ , ce qui va grandement simplifier le système (XIV-1) :

$$\begin{aligned}
 j\omega\epsilon\rho E_x &= \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_\Phi) - \frac{\partial}{\partial\Phi}(H_\rho) \\
 -j\omega\mu\rho H_\rho &= \frac{\partial}{\partial\Phi}(E_x) \\
 j\omega\mu H_\Phi &= \frac{\partial}{\partial\rho}(E_x)
 \end{aligned}
 \tag{XIV-2}$$

On notera en particulier une disparition de la dépendance en  $x$  du champ électrique  $E_x$  qui ne dépend donc plus que des variables  $\rho$  et  $\Phi$ .

Par substitution des expressions de  $H_\rho$  et  $H_\Phi$ , la résolution du système (XIV-2) conduit à l'équation :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\Phi^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right] E_x = 0
 \tag{XIV-3}$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre en  $\rho$  et  $\Phi$  dont la résolution serait sans doute très complexe dans le cas général. Dans le cas des propagations guidées, nous savons que les solutions se présentent en général sous des expressions à variables séparées, ce qui revient à dire que nous allons rechercher une solution de l'équation (XIV-3) telle que :

$$E_x(\rho, \Phi) = E_x(\rho).E_x(\Phi)
 \tag{XIV-4}$$

La séparation des variables permet de découpler l'équation (XIV-3) en deux équations indépendantes en  $\rho$  et  $\Phi$  :

$$\frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} E_x(\Phi) = -\gamma^2 E_x(\Phi) \quad (\text{XIV-5})$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\gamma^2}{\rho^2} \right] E_x(\rho) = 0 \quad (\text{XIV-6})$$

où  $\gamma$  est pour l'instant une constante arbitraire.

Après le changement de variable  $\rho' = \frac{\omega}{c} \rho$ , l'équation (XIV-6) devient :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho'^2} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} + 1 - \frac{\gamma^2}{\rho'^2} \right] E_x(\rho') = 0 \quad (\text{XIV-7})$$

On retrouve l'équation de BESSEL d'ordre  $\gamma$ , caractéristique des phénomènes de propagation en deux dimensions analogues à celui que nous analysons.

La solution à cette équation peut s'exprimer de différentes manières. La plus opportune pour nous sera à partir des fonctions de HANKEL dont la forme asymptotique s'interprète directement en termes de propagation de l'onde

Ces fonctions  $H_\gamma^{(1)}$  et  $H_\gamma^{(2)}$  sont les fonctions de HANKEL de 1ère et 2ème espèce et sont définies à partir des fonctions de BESSEL de 1ère espèce  $J_\gamma$  et de 2ème espèce  $Y_\gamma$  par la relation :

$$H_\gamma^{(1)}(\rho') = J_\gamma(\rho') + j Y_\gamma(\rho') \quad \text{et} \quad H_\gamma^{(2)}(\rho') = J_\gamma(\rho') - j Y_\gamma(\rho') \quad (\text{XIV-8})$$

Avec  $j^2 = -1$

Toute solution de (XIV-7) peut donc s'exprimer sous la forme :

$$E_x(\rho') = C \cdot H_\gamma^{(1)}(\rho') + D \cdot H_\gamma^{(2)}(\rho') \quad (\text{XIV-9})$$

où C et D sont des constantes qui seront déterminées par les conditions aux limites.

D'autre part, la solution de l'équation (XIV-5) s'écrit classiquement :

$$E_x(\Phi) = A \cdot \sin(\gamma \Phi) + B \cdot \cos(\gamma \Phi) \quad (\text{XIV-10})$$

où A et B sont des constantes qui seront déterminées par les conditions aux limites.

En conclusion, le champ électrique suivant Ox s'exprime sous la forme :

$$E_x(\rho, \Phi) = [A \sin(\gamma \Phi) + B \cos(\gamma \Phi)] \left[ C \cdot H_\gamma^{(1)}\left(\frac{\omega}{c} \rho\right) + D \cdot H_\gamma^{(2)}\left(\frac{\omega}{c} \rho\right) \right] \quad (\text{XIV-11})$$

où A, B, C, D sont quatre constantes à déterminer.

Les conditions aux limites sur les murs électriques parfaits parallèles du cornet imposent  $E_x = 0$  pour  $\Phi = \pm \Phi_0 / 2$ , soit donc :

$$\begin{aligned} A \sin\left(\gamma \frac{\Phi_0}{2}\right) + B \cos\left(\gamma \frac{\Phi_0}{2}\right) &= 0 \\ -A \sin\left(\gamma \frac{\Phi_0}{2}\right) + B \cos\left(\gamma \frac{\Phi_0}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{XIV-12})$$

Le système (XIV-12) est un système homogène qui n'admet de solution non nulle que si son déterminant est nul, soit :

$$2 \sin\left(\gamma \frac{\Phi_0}{2}\right) \cos\left(\gamma \frac{\Phi_0}{2}\right) = 0 \quad (\text{XIV-13})$$

Soit encore :

$$\gamma \Phi_0 = m \pi \quad m \text{ entier relatif} \quad (\text{XIV-14})$$

En substituant cette valeur dans (XIV-12), on en déduit que  $A = 0$  lorsque  $m$  est impair, et que  $B = 0$  lorsque  $m$  est pair.

Après avoir regroupé les constantes, le champ électrique qui se propage dans le guide pyramidal s'exprime donc sous la forme :

$$E_x(\rho, \Phi) = A \cos(\gamma_m \Phi) [B H_{\gamma_m}^{(1)}(k\rho) + H_{\gamma_m}^{(2)}(k\rho)] \text{ sur les modes impairs} \quad (\text{XIV-15})$$

$$E_x(\rho, \Phi) = A \sin(\gamma_m \Phi) [B H_{\gamma_m}^{(1)}(k\rho) + H_{\gamma_m}^{(2)}(k\rho)] \text{ sur les modes pairs} \quad (\text{XIV-16})$$

$$\text{avec } \gamma_m = \frac{m\pi}{\Phi_0} \quad \text{et} \quad k = \frac{\omega}{c} \rho \quad (\text{XIV-17})$$

L'examen des formes asymptotiques des fonctions de HANKEL ( $k\rho$  grand) :

$$H_{\gamma_m}^{(1)}(k\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \exp\left[j\left(k\rho - \frac{(2\gamma_m - 1)\pi}{4}\right)\right] \quad (\text{XIV-18})$$

$$H_{\gamma_m}^{(2)}(k\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \exp\left[-j\left(k\rho - \frac{(2\gamma_m - 1)\pi}{4}\right)\right] \quad (\text{XIV-19})$$

montre que la fonction de HANKEL de 2<sup>ème</sup> espèce décrit une onde se propageant vers l'infini, tandis que la fonction de HANKEL de 1<sup>ère</sup> espèce décrit une onde se propageant vers l'origine.

Dans ces conditions, la constante B présente dans les expressions du champ électrique (XIV-15) et (XIV-16) s'interprète comme le coefficient de réflexion de l'onde à l'ouverture du cornet, transition entre le guide pyramidal et l'espace libre.

Pour un cornet bien conçu, ce coefficient sera le plus faible possible, et dans la pratique, nous le considérerons désormais comme nul ( $B = 0$ ).

Dans ces conditions, nous pouvons donner l'expression du champ électrique suivante :

$$E_x(\rho, \Phi) = A \sin(\gamma_m \Phi) H_{\gamma_m}^{(2)}(k\rho) \quad \text{sur les modes impairs} \quad (\text{XIV-20})$$

$$E_x(\rho, \Phi) = A \cos(\gamma_m \Phi) H_{\gamma_m}^{(2)}(k\rho) \quad \text{sur les modes pairs} \quad (\text{XIV-21})$$

$m$  représente l'indice des modes susceptibles de se propager dans le guide pyramidal. Des modes supérieurs peuvent prendre naissance à la transition entre le guide rectangulaire et le guide pyramidal, mais ils sont fortement atténués dans les premiers instants de propagation (Il faut développer les fonctions de HANKEL au voisinage de  $k\rho = 0$  pour le montrer).

Pratiquement, on considérera qu'il n'existe plus à la transition cornet-espace libre que le mode fondamental et on admettra que le champ électrique qui se propage dans le guide pyramidal à la forme suivante :

$$E_x(\rho, \Phi) = A \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) H_{\gamma_1}^{(2)}(k\rho) \quad (\text{XIV-22})$$

On déduit de (XIV-2) les deux autres composantes du champ électromagnétique :

$$H_\rho(\rho, \Phi) = A \frac{-j\pi}{\omega\mu\rho\Phi_0} \sin\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) H_{\gamma_1}^{(2)}(k\rho) \quad (\text{XIV-23})$$

$$H_\Phi(\rho, \Phi) = A \frac{-j\pi}{\omega\mu} \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \frac{\partial}{\partial \rho} H_{\gamma_1}^{(2)}(k\rho) \quad (\text{XIV-24})$$

Enfin, si la dimension  $\rho_1$  du cornet est grande devant la longueur d'onde, on peut faire les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} - H_\rho &= 0 \text{ à cause de la décroissance en } 1/\rho \\ - \frac{\partial}{\partial \rho} H_{\gamma_1}^{(2)}(k\rho) &= -jk\rho H_{\gamma_1}^{(2)}(k\rho) \end{aligned} \quad (\text{XIV-25})$$

$$- H_{\gamma_1}^{(2)}(k\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \exp\left[-j\left(k\rho - \frac{(2\gamma_1 - 1)\pi}{4}\right)\right] \quad (\text{XIV-26})$$

Ne subsistent alors que deux composantes de champ :

$$E_x(\rho, \Phi) = A \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \exp\left[j\left(\frac{(2\gamma_1 - 1)\pi}{4}\right)\right] \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \exp(-jk\rho) \quad (\text{XIV-27})$$

$$H_{\Phi}(\rho, \Phi) = -A \frac{k}{\omega\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} \exp\left[j\left(\frac{(2\gamma_1 - 1)\pi}{4}\right)\right] \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \exp(-jk\rho) \quad (\text{XIV-28})$$

En regroupant les termes constants, on parvient à l'expression suivante :

$$E_x(\rho, \Phi) = E \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \frac{\exp(-jk\rho)}{\sqrt{\rho}} \quad (\text{XIV-29})$$

$$H_{\Phi}(\rho, \Phi) = -\frac{E}{\eta} \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \frac{\exp(-jk\rho)}{\sqrt{\rho}} \quad (\text{XIV-30})$$

où  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 120\pi$  représente l'impédance d'onde du vide.

On retrouve ici de manière rigoureuse le résultat heuristique avancé en début de chapitre : lorsque la dimension en  $\rho$  sera suffisante, l'onde qui se propage dans le guide pyramidal aura une structure d'onde plane, avec une impédance d'onde égale à celle du vide : la transition avec l'espace libre se fera alors naturellement.

Pour terminer la détermination du champ électromagnétique dans l'ouverture, il reste à tenir compte d'un écart de phase entre le front d'onde qui se propage dans le guide, et le plan d'ouverture du cornet (Figure XIV-7)

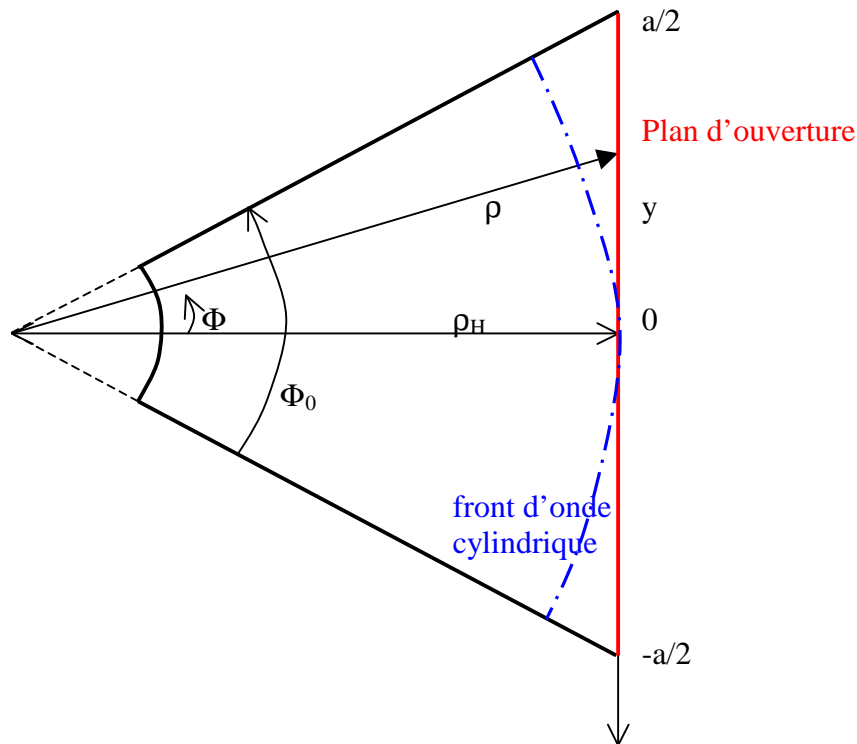


Figure XIV-7 : Représentation du front d'onde équiphase et du plan d'ouverture.

L'écart de phase entre un rayon qui atteint le point de l'ouverture de cote  $y$ , et un rayon qui atteint le point de l'ouverture de cote  $0$  est donné par :



$$\Delta\varphi = k(\rho - \rho_H) = k(\sqrt{\rho_H^2 - y^2} - \rho_H) \quad (\text{XIV-31})$$

Cette expression se simplifie lorsque  $y \ll \rho_H$ , et on obtient :

$$\Delta\varphi \approx k\rho_H \left( \sqrt{1 - \frac{y^2}{\rho_H^2}} - 1 \right) \approx -\frac{ky^2}{2\rho_H} \quad (\text{XIV-32})$$

Dans les mêmes conditions, on fera de plus l'approximation :

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} \approx \frac{y}{a} \quad (\text{XIV-33})$$

On obtient alors l'expression couramment utilisée du champ électromagnétique dans l'ouverture du cornet, exprimée en coordonnées rectangulaires ( $H_\Phi$  est assimilé à  $-H_y$  car les dimensions du cornet sont toujours supposées grandes devant la longueur d'onde et les vecteurs unitaires  $\vec{U}_\Phi$  et  $\vec{U}_y$  sont opposés au voisinage de l'axe Oz):

$$E_x(y) = E \cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) \exp\left(-j \frac{ky^2}{2\rho_H}\right) \quad (\text{XIV-34})$$

$$H_y(y) = \frac{E}{\eta} \cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) \exp\left(-j \frac{ky^2}{2\rho_H}\right) \quad (\text{XIV-35})$$

Dans l'ouverture du cornet, un champ a la distribution en amplitude du mode fondamental amené par le guide rectangulaire. Ce champ a la structure vectorielle d'une onde plane, respecte donc l'impédance d'onde du vide, mais présente un écart quadratique de phase lorsque l'on s'éloigne du centre de l'ouverture.

## **I-2 Le cornet sectoriel plan E**

Pour ce type de cornet, seuls les deux parois du guide pyramidal situées dans le plan E vont aller en s'évasant. Les deux autres, situées dans le plan H, restent parallèles (Figure XIV-4).

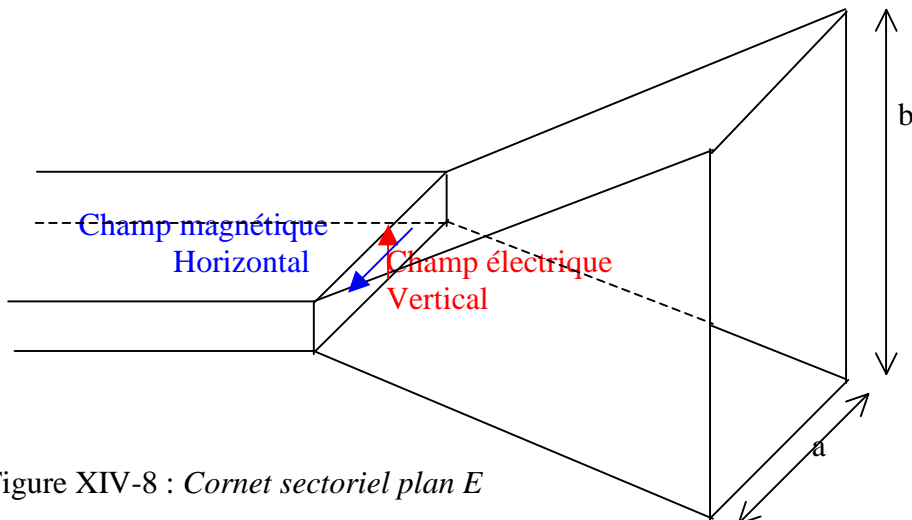


Figure XIV-8 : Cornet sectoriel plan E

Une analyse analogue à la configuration plan H peut être menée dans cette situation, et conduit à l'expression des champs dans l'ouverture suivante, sous les mêmes hypothèses que précédemment :

$$E_x(y) = E \cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) \exp\left(-j \frac{kx^2}{2\rho_E}\right) \quad (\text{XIV-36})$$

$$H_y(y) = \frac{E}{\eta} \cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) \exp\left(-j \frac{kx^2}{2\rho_E}\right) \quad (\text{XIV-37})$$

On y retrouve la distribution d'onde plane avec l'écart quadratique de phase par rapport au centre de l'ouverture qui a cette fois une dépendance en x. De plus, la distance de l'ouverture au sommet de la pyramide n'étant pas nécessairement la même que la précédente, elle est notée  $\rho_E$ .

### **I-3 Le cornet pyramidal**

C'est la configuration courante que l'on retrouve en pratique : le cornet est évasé simultanément dans les deux plans (Figure XIV-9)

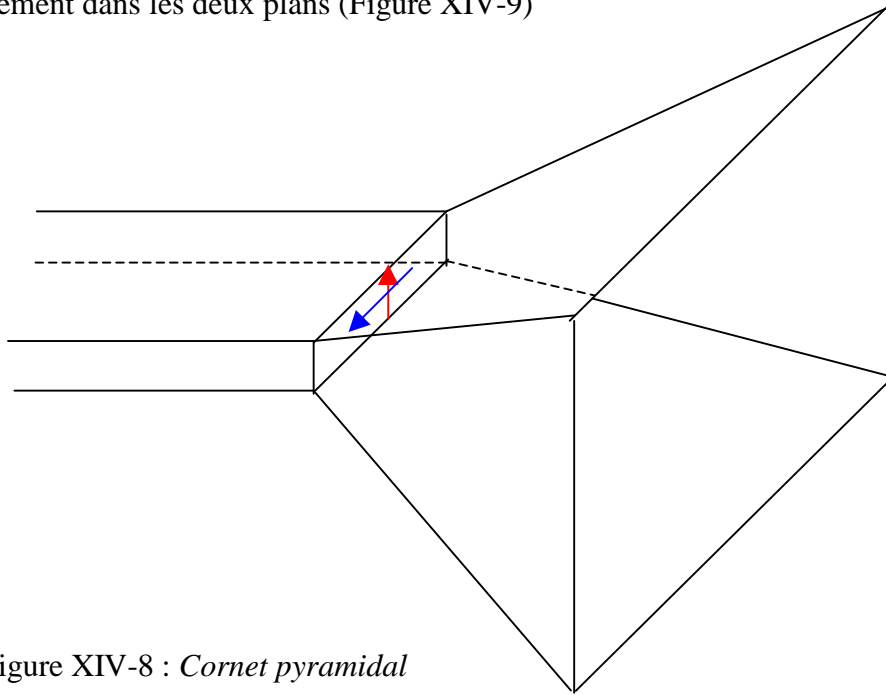


Figure XIV-8 : *Cornet pyramidal*

Puisque la configuration des champs est identique dans les plan E et H, il suffit de tenir compte de l'écart quadratique de phase dans ces deux plans pour obtenir l'expression du champ électromagnétique dans l'ouverture :

$$E_x(x, y) = E \cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) \exp\left(-j \frac{k}{2} \left\{ \frac{x^2}{\rho_E} + \frac{y^2}{\rho_H} \right\}\right) \quad (\text{XIV-38})$$

$$H_y(x, y) = \frac{E}{\eta} \cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) \exp\left(-j \frac{k}{2} \left\{ \frac{x^2}{\rho_E} + \frac{y^2}{\rho_H} \right\}\right) \quad (\text{XIV-39})$$

## II – Calcul du champ rayonné

Le champ rayonné va être calculé par application du théorème d'équivalence. La surface de HUYGENS sera le plan infini qui contient l'ouverture. Dans cette situation, le théorème n'est pas utilisé de manière rigoureuse, car nous allons faire l'hypothèse d'un champ nul en dehors de l'ouverture, ce qui n'est pas exact.

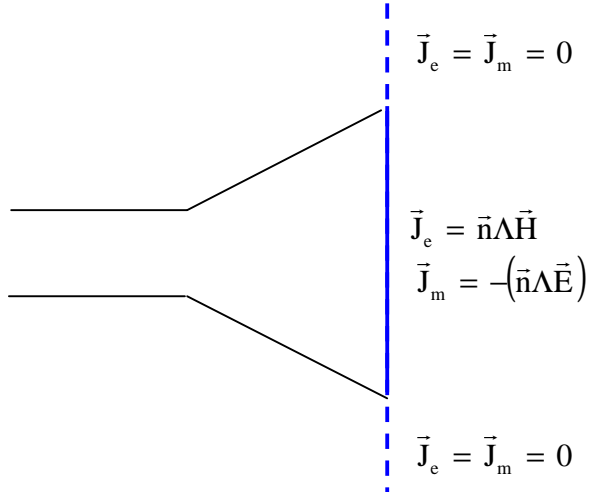


Figure XIV-9 : Représentation de la surface de HUYGENS et des courants équivalents pris en considération

Les coordonnées cartésiennes qui repèrent les champs et courants dans l'ouverture, ainsi que les coordonnées polaires qui repèrent le champ rayonné sont représentées Figure XIV-10 :

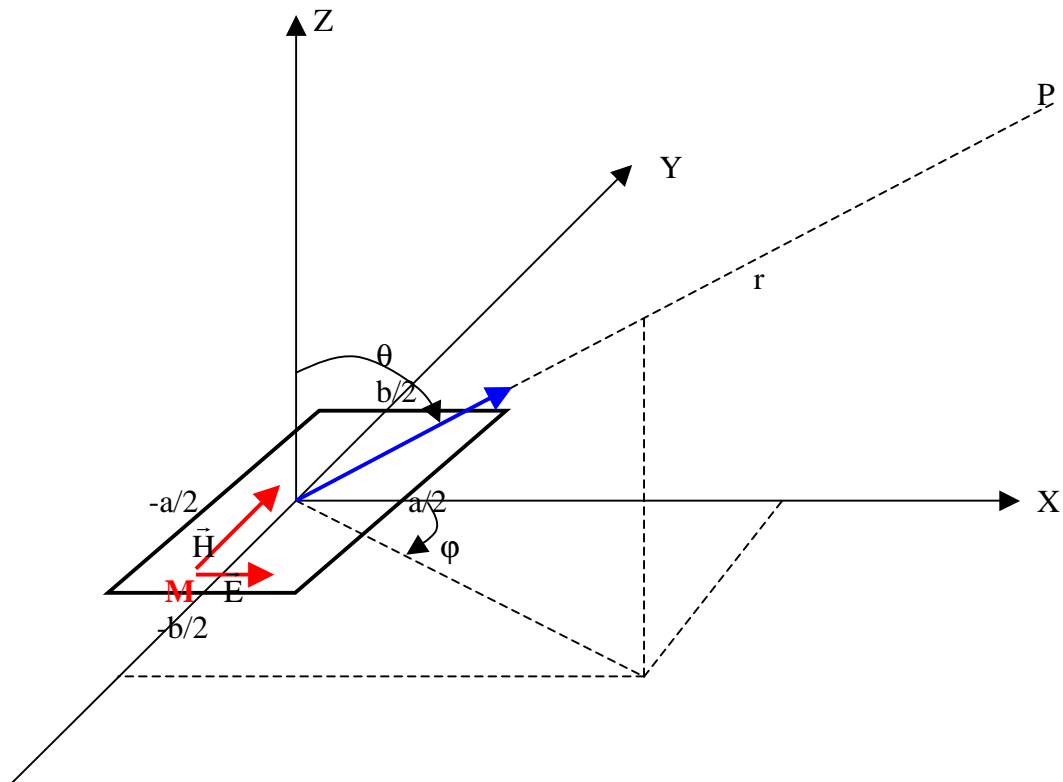


Figure XIV-10 : Représentation des systèmes de coordonnées

On déduit du champ dans l'ouverture les courants équivalents sur la surface de HUYGENS :

$$\vec{J}_e = \vec{n} \Lambda \vec{H} = -\frac{E}{\eta} \cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) \exp\left(-j \frac{k}{2} \left\{ \frac{x^2}{\rho_E} + \frac{y^2}{\rho_H} \right\}\right) \vec{e}_x \quad (\text{XIV-40})$$

$$\vec{J}_m = -(\vec{n} \Lambda \vec{E}) = -E \cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) \exp\left(-j \frac{k}{2} \left\{ \frac{x^2}{\rho_E} + \frac{y^2}{\rho_H} \right\}\right) \vec{e}_y \quad (\text{XIV-41})$$

Le cas d'une ouverture rectangulaire a déjà été traité au chapitre du rayonnement des ouvertures et nous pouvons exploiter les résultats obtenus, sous des hypothèses qui sont vérifiées dans le cas des cornets :

- Les champs dans l'ouverture sont séparables en x et y.
- Les champs dans l'ouverture ont la structure d'une onde plane : ils sont orthogonaux entre eux, et le rapport de leur module est égal à l'impédance d'onde du vide.

Dans ces conditions, nous avons obtenu le champ rayonné par l'ouverture sous la forme :

$$\vec{E}(P) = \frac{j k}{4\pi} \psi(R) (1 + \cos \theta) (\cos \varphi \vec{e}_\theta - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) F_x F_y \quad (\text{XIV-42})$$

$$\text{avec : } F_x = \int_{-a/2}^{a/2} E_x(x) e^{j k_x x} dx \quad \text{et} \quad F_y = \int_{-b/2}^{b/2} E_y(y) e^{j k_y y} dy \quad (\text{XIV-43})$$

$$\text{et} \quad k_x = k \sin \theta \cos \varphi \quad \text{et} \quad k_y = k \sin \theta \sin \varphi \quad (\text{XIV-44})$$

En omettant le terme constant E, on prendra pour les calculs :

$$E_x(x, y) = \cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) \exp\left(-j \frac{k}{2} \left\{ \frac{x^2}{\rho_E} + \frac{y^2}{\rho_H} \right\}\right) = E_x(x) \cdot E_y(y) \quad (\text{XIV-45})$$

avec :

$$E_x(x) = \exp\left(-j \frac{k}{2} \frac{x^2}{\rho_E}\right) \quad \text{et} \quad E_y(y) = \cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) \exp\left(-j \frac{k}{2} \frac{y^2}{\rho_H}\right) \quad (\text{XIV-46})$$

La substitution de ces expressions dans les intégrales (XIV-43) conduit à une expression analytique du champ rayonné en fonction d'intégrales de FRESNEL, après des calculs quelque peu fastidieux. Puisque les intégrales de FRESNEL doivent être calculées par des méthodes numériques, il semble aussi simple d'utiliser directement les outils numériques pour évaluer les intégrales (XIV-43)

On évaluera donc numériquement les expressions suivantes :

$$F_x = \int_{-b/2}^{b/2} e^{j\left(k_x x - \frac{kx^2}{2\rho_E}\right)} dx = \int_{-b/2}^{b/2} e^{jk\left(\sin \theta \cos \varphi x - \frac{x^2}{2\rho_E}\right)} dx \quad (\text{XIV-47})$$

$$F_y = \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) e^{j\left(k_y y - \frac{ky^2}{2\rho_H}\right)} dy = \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) e^{jk\left(\sin \theta \sin \varphi y - \frac{y^2}{2\rho_H}\right)} dy \quad (\text{XIV-48})$$

dans l'expression totale du champ rayonné :

$$\vec{E}(P) = \frac{jk}{4\pi} \psi(R) (1 + \cos \theta) (\cos \varphi \vec{e}_\theta - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) E \int_{-b/2}^{b/2} e^{jk\left(\sin \theta \cos \varphi x - \frac{x^2}{2\rho_E}\right)} dx \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) e^{jk\left(\sin \theta \sin \varphi y - \frac{y^2}{2\rho_H}\right)} dy \quad (\text{XIV-49})$$

### Diagrammes de rayonnement dans le plan E

Le plan E étant le plan  $\varphi = 0$ , nous avons à évaluer le diagramme de rayonnement non normalisé :

$$E_E(\theta) = (1 + \cos \theta) \int_{-b/2}^{b/2} e^{jk\left(\sin \theta x - \frac{x^2}{2\rho_E}\right)} dx \quad (\text{XIV-50})$$

la polarisation étant portée par le vecteur  $\vec{e}_\theta$ .

Deux paramètres influent sur le diagramme de rayonnement : la dimension de l'ouverture  $b$  suivant l'axe des  $x$ , et la distance du plan d'ouverture au centre de phase  $\rho_E$ , et deux séries de courbes peuvent être présentées suivant la variation de l'un ou l'autre paramètre.

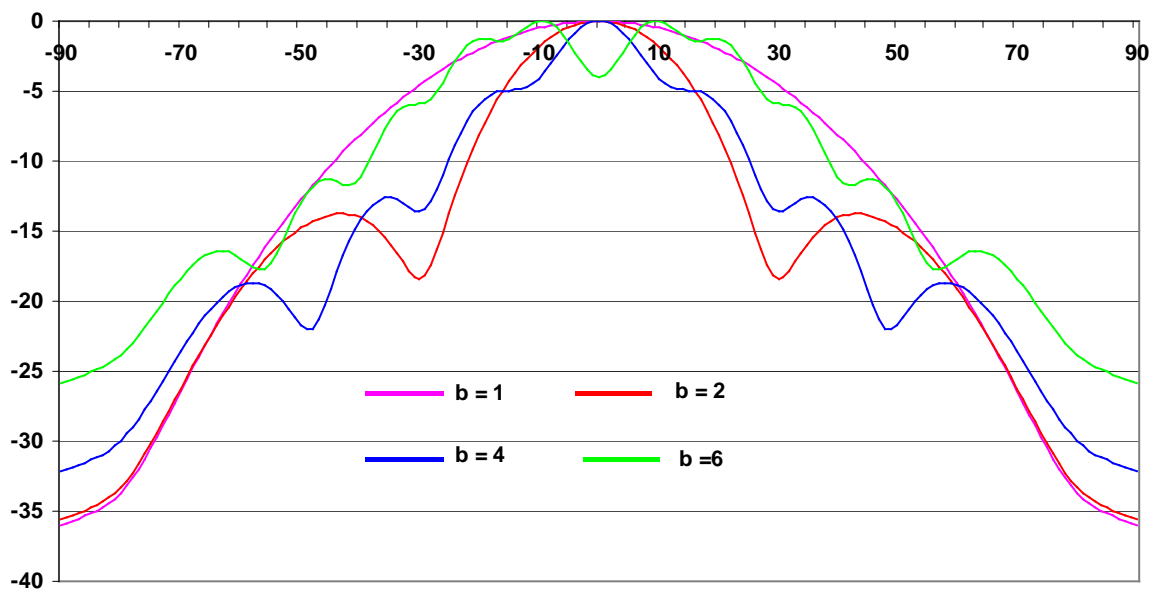


Figure XIV-11 : Diagramme de rayonnement plan E pour  $\rho_E = 5\lambda$  et  $b = \lambda, 2\lambda, 4\lambda, 6\lambda$

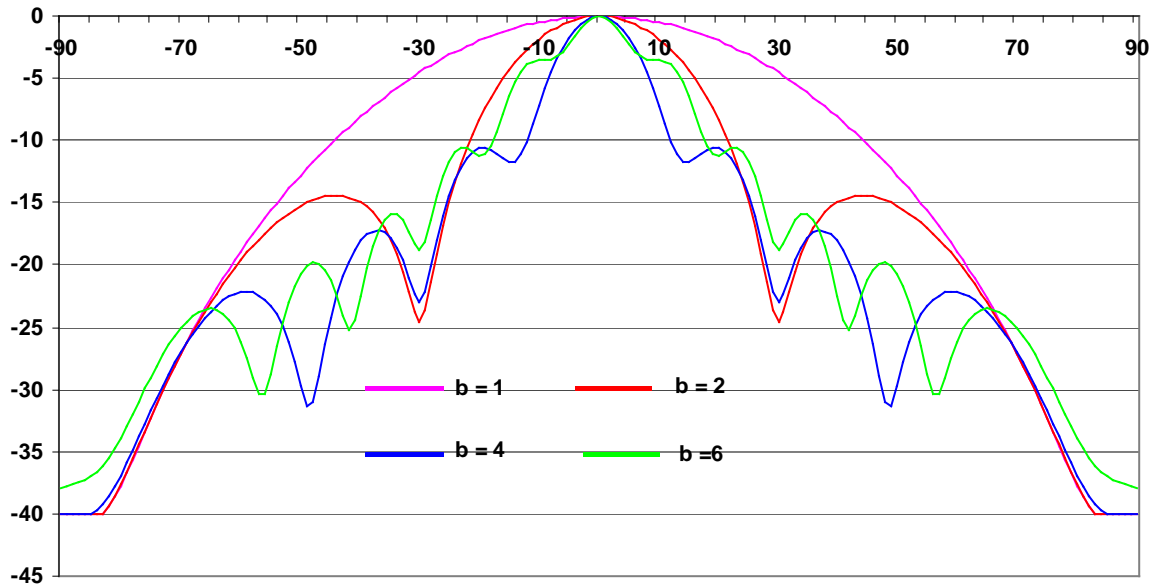


Figure XIV-12 : *Diagramme de rayonnement plan E pour  $\rho_E = 10\lambda$  et  $b = \lambda, 2\lambda, 4\lambda, 6\lambda$*

Dans le plan E, l'ouverture présente une répartition de champ uniforme. Le diagramme doit donc devenir de plus en plus directif au fur et à mesure que la dimension de l'ouverture augmente : c'est ce que l'on peut constater sur les figures présentées.

Cependant, l'écart quadratique de phase a pour effet de remonter considérablement les lobes secondaires et d'éliminer les minima profonds. Ainsi, sur le diagramme ( $\rho_E = 5\lambda$  et  $b = 6\lambda$ ), on ne distingue plus le lobe principal du à la dimension de l'ouverture, mais un lobe ondulant très large qui inclut des lobes secondaires remontés à un niveau très élevé.

De plus, le déphasage important des champs dans l'ouverture conduit à des maxima de rayonnement qui ne sont plus dans l'axe de l'ouverture.

### Diagrammes de rayonnement dans le plan H

Le plan H étant le plan  $\varphi = \pi/2$ , nous avons à évaluer le diagramme de rayonnement non normalisé :

$$E_H(\theta) = (1 + \cos \theta) \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) e^{jk\left(\sin \theta y - \frac{y^2}{2\rho_H}\right)} dy \quad (\text{XIV-51})$$

la polarisation étant portée par le vecteur  $\vec{e}_\varphi$ .

Dans le plan H, deux effets viennent modifier le diagramme que l'on obtiendrait avec une répartition uniforme des champs dans l'ouverture. L'apodisation sur l'amplitude du champ en cosinus au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre de l'ouverture conduit à un abaissement des lobes secondaires, tandis que l'écart quadratique de phase fait disparaître les minima et remonter les lobes secondaires.

Sur la figure XIV-13, on constate tout d'abord que lorsque la dimension de l'ouverture augmente de  $a = \lambda$  à  $a = 4\lambda$  le lobe principal devient plus directif. Puis de  $a = 4\lambda$  à  $a = 6\lambda$ , il

devient moins directif : c'est qu'alors l'effet de l'écart de phase l'emporte sur l'augmentation de la dimension de l'ouverture.

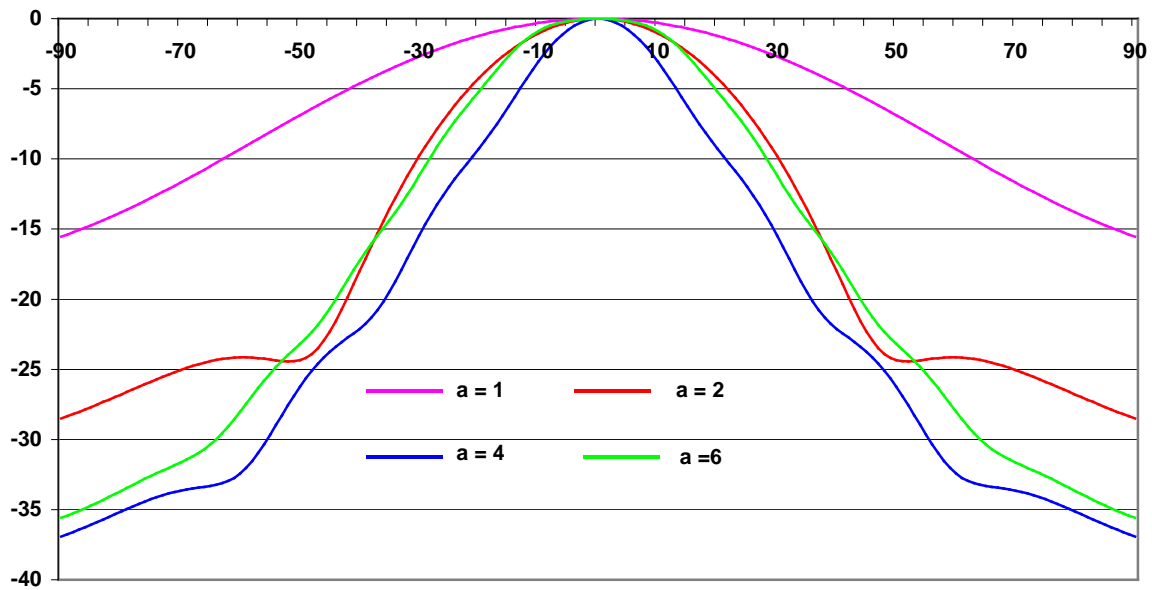


Figure XIV-13 : Diagramme de rayonnement plan  $H$  pour  $\rho_H = 5\lambda$  et  $a = \lambda, 2\lambda, 4\lambda, 6\lambda$

On constate un effet analogue sur les figures XIV-14 et XIV-15, ou de  $a = \lambda$  à  $a = 6\lambda$ , le lobe de rayonnement principal diminue, tandis qu'il augmente au delà de  $a = 6\lambda$ . On assiste même, sur la figure XIV-15, à un effet assez remarquable qui consiste à obtenir pour de grande ouvertures, un rayonnement sans lobes secondaires (L'amplitude a été volontairement tronquée à  $-40\text{dB}$ , mais ne masque pas de remontée du champ)

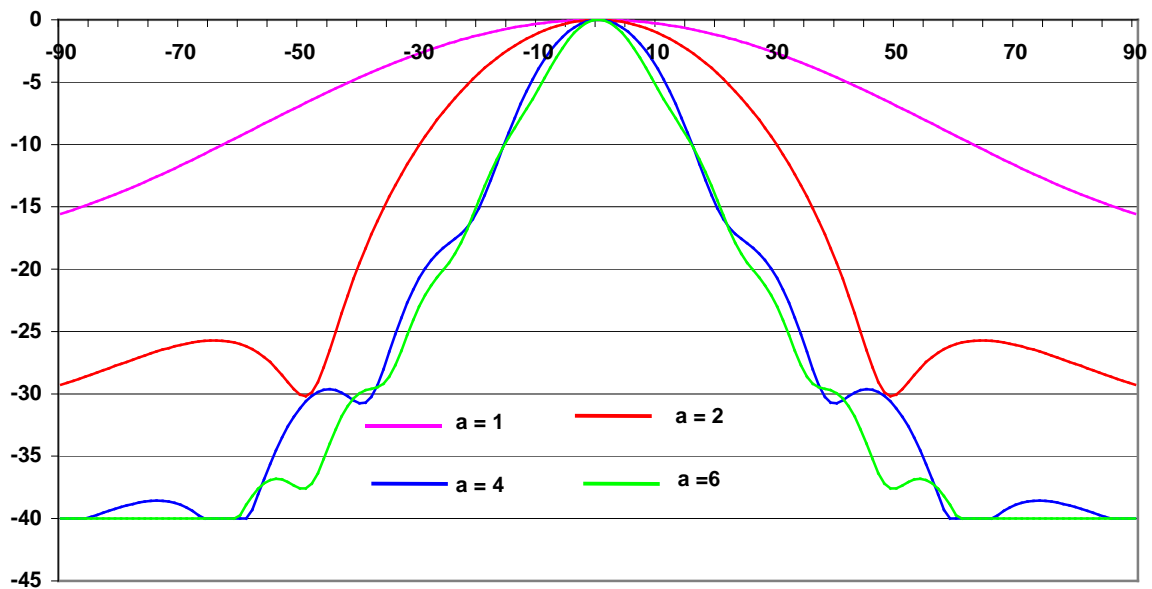


Figure XIV-14 : Diagramme de rayonnement plan  $H$  pour  $\rho_H = 10\lambda$  et  $a = \lambda, 2\lambda, 4\lambda, 6\lambda$

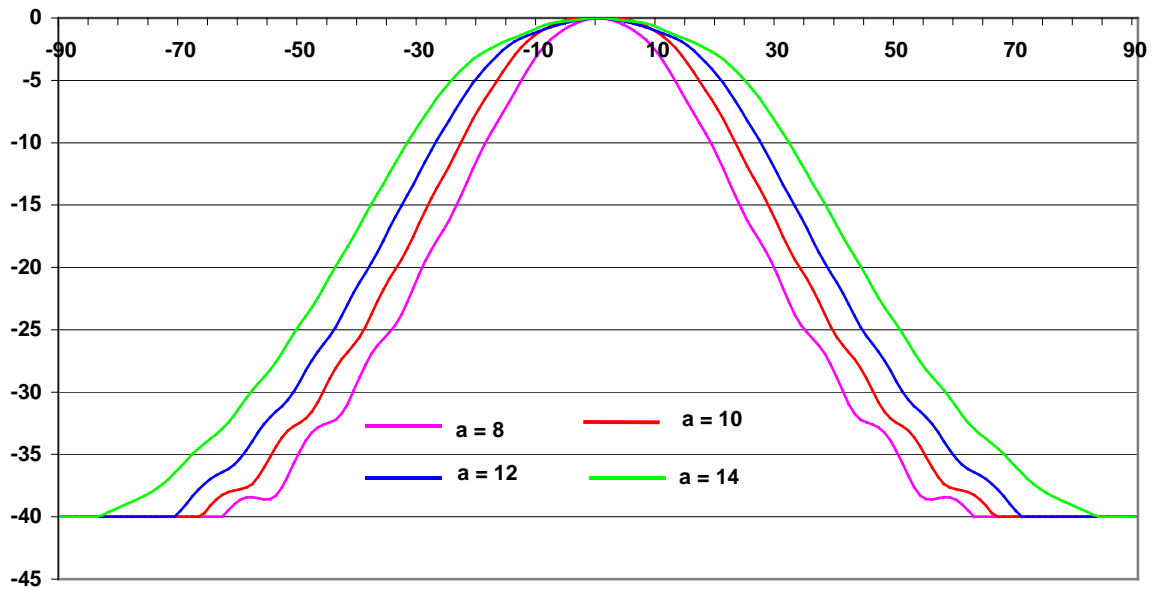


Figure XIV-15 : Diagramme de rayonnement plan  $H$  pour  $\rho_H = 10\lambda$  et  $a = 8\lambda, 10\lambda, 12\lambda, 14\lambda$

Cet effet mérite que l'on s'attarde un peu sur la manière dont il est obtenu. On a représenté sur la Figure XIV-16, quatre courbes qui montrent comment à partir d'une ouverture à illumination uniforme, les diagrammes se transforment lorsqu'on introduit une apodisation, puis un écart quadratique de phase.

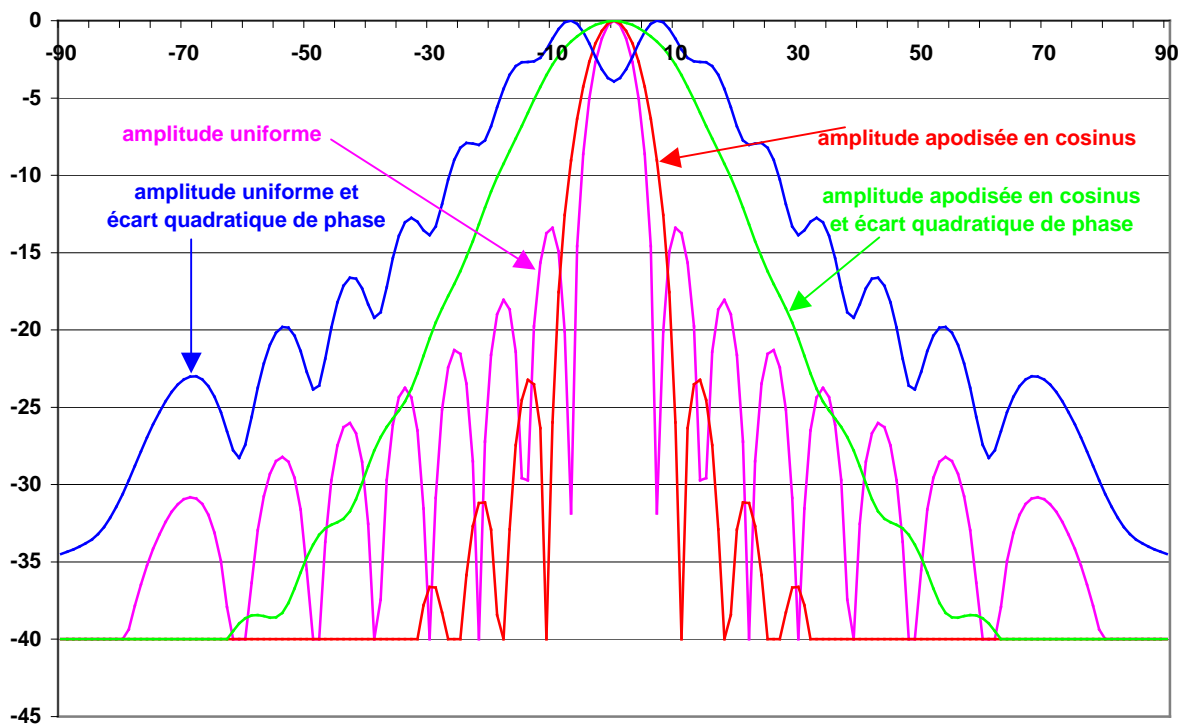


Figure XIV-15 : Mise en évidence des effets de l'apodisation et de l'écart quadratique de phase sur le rayonnement d'une ouverture



Les effets de l'apodisation et de l'écart quadratique de phase étant contradictoires, on obtient lorsqu'on les mélange, un diagramme lissé intermédiaire entre le diagramme d'une ouverture apodisée et le diagramme d'une ouverture d'amplitude constante mais avec un écart quadratique de phase.

### **III – Calcul de la directivité**

La directivité d'une antenne se calcule à partir de la relation :

$$D(\theta, \phi) = \frac{\Delta P_s(\theta, \phi)}{P / 4\pi R^2} \quad (\text{XIV-52})$$

dans laquelle le numérateur désigne la densité surfacique de puissance rayonnée à la distance R dans la direction  $(\theta, \phi)$ , et P la puissance totale rayonnée.

La densité surfacique de puissance est égale au module du vecteur de Poynting, ce qui permet d'écrire :

$$\Delta P_s(\theta) = |\vec{P}| = \left| \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \Lambda \vec{H}^*) \right| = \frac{1}{2} \frac{E^2}{\eta} \quad (\text{XIV-53})$$

La puissance rayonnée P est égale à l'intégrale du module du vecteur de Poynting sur la sphère de rayon R :

$$P = \iint_S \Delta P_s \cdot ds \quad (\text{XIV-54})$$

où, faisant usage de l'élément de surface en coordonnées polaires :

$$ds = R^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi \quad (\text{XIV-55})$$

On obtient :

$$D(\theta, \phi) = \frac{E^2(\theta, \phi)}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} E^2(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi} 4\pi \quad (\text{XIV-56})$$

en ne considérant que le rayonnement dans le demi-espace supérieur ( $0 < \theta < \pi/2$ ).

Dans cette expression, après simplification par les constantes, l'expression du champ peut être déduite de (XIV-49) :

$$E^2(\theta, \phi) = \left[ (1 + \cos \theta) \int_{-b/2}^{b/2} e^{jk \left( \sin \theta \cos \phi \cdot x - \frac{x^2}{2\rho_E} \right)} dx \int_{-a/2}^{a/2} \cos \left( \pi \frac{y}{a} \right) e^{jk \left( \sin \theta \sin \phi \cdot y - \frac{y^2}{2\rho_H} \right)} dy \right]^2 \quad (\text{XIV-57})$$

Comme dans la plupart des cas concrets, l'expression de la directivité (XIV-56) nécessite une évaluation numérique.

Lorsque l'ouverture est équiphase, on sait que la directivité augmente avec la dimension de l'ouverture.

Lorsque cette même ouverture présente un écart de phase qui augmente de manière quadratique au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'ouverture, on devine que pour de petites dimensions, on est proche du gain maximum réalisable, tandis que pour de grandes ouvertures, il va exister des contributions en opposition de phase qui vont diminuer cette directivité.

On en déduit qu'il doit exister une dimension optimum de l'ouverture qui présente une directivité maximum.

C'est dans l'obtention de cet optimum que réside l'intérêt des courbes suivantes qui représentent l'évolution du gain dans l'axe ( $\theta = 0$ ) en fonction de la dimension de l'ouverture, pour plusieurs valeurs  $\rho_E$  ou  $\rho_H$  de la longueur du cornet. Ces derniers paramètres influent sur les variations de l'écart quadratique de phase qui sont d'autant plus rapides que  $\rho_E$  (RoE) ou  $\rho_H$  (RoH) sont faibles.

La figure (XIV-16) représente l'évolution de la directivité pour un cornet sectoriel plan H, lorsque la dimension  $b$  est fixe, et prise arbitrairement égale à  $b = 0.3 \lambda$ , tandis que l'autre dimension de l'ouverture varie de  $a = 0.5 \lambda$  à  $a = 20 \lambda$ .

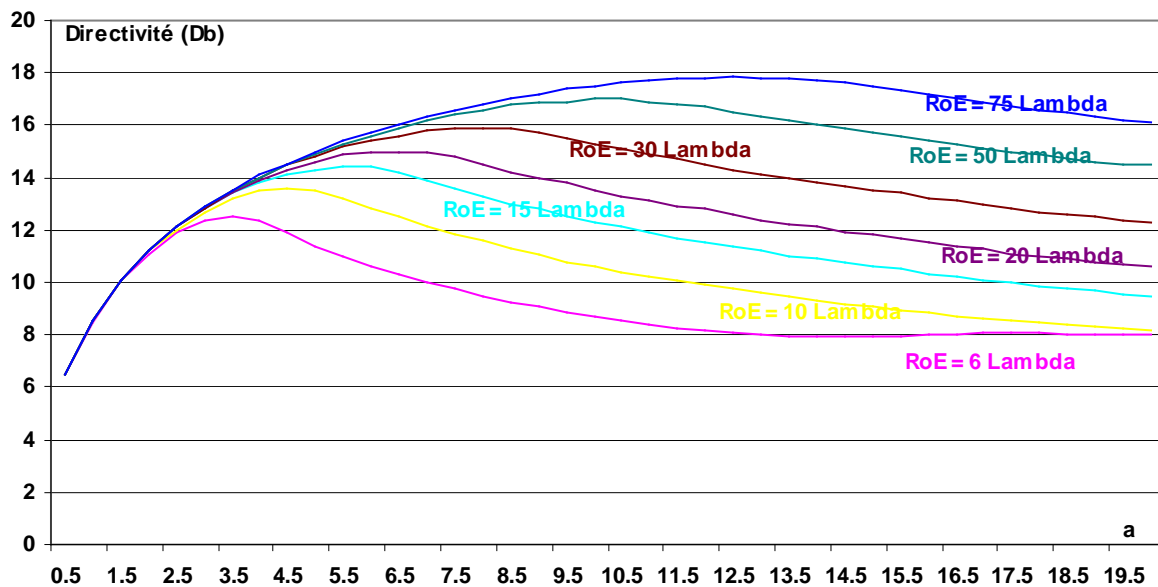


Figure XIV-16 : Evolution de la directivité d'un cornet sectoriel plan H ( $b = 0.3 \lambda$ ,  $\rho_H = 6\lambda$ ) en fonction de la dimension  $a$  de l'ouverture, et pour différentes valeurs de  $\rho_E$ .

La figure (XIV-17) représente l'évolution de la directivité pour un cornet sectoriel plan E, lorsque la dimension  $a$  est fixe, et prise arbitrairement égale à  $a = 0.3 \lambda$ , tandis que l'autre dimension de l'ouverture varie de  $b = 0.5 \lambda$  à  $b = 20 \lambda$ .

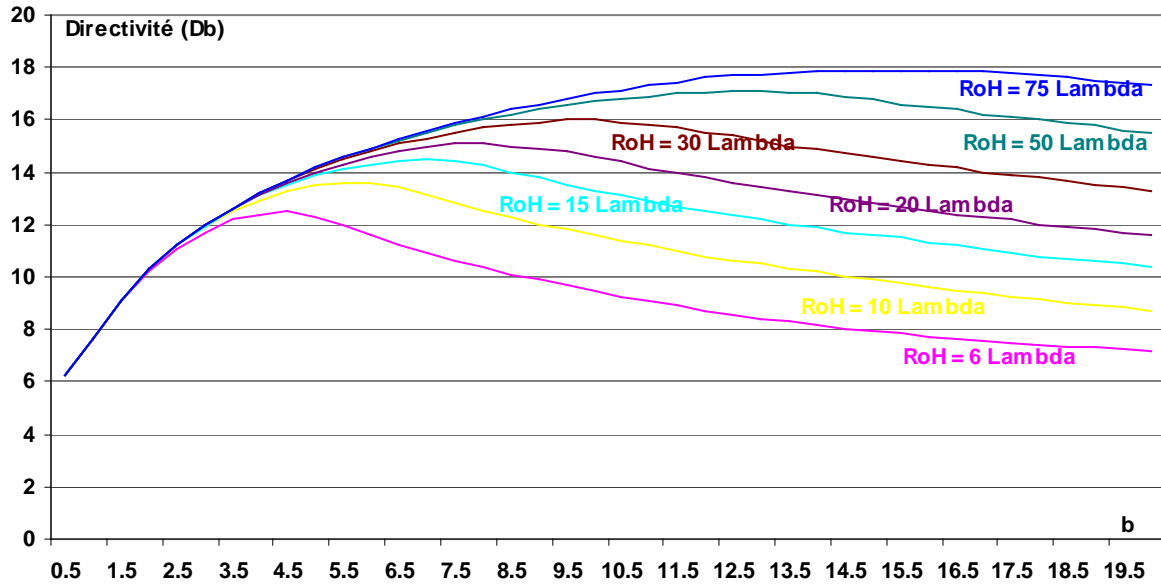


Figure XIV-17 : : Evolution de la directivité d'un cornet sectoriel plan E ( $a = 0.3 \lambda$ ,  $\rho_E = 6\lambda$ ) en fonction de la dimension  $b$  de l'ouverture, et pour différentes valeurs de  $\rho_H$ .

La figure (XIV-18) représente l'évolution de la directivité pour un cornet pyramidal de section carré ( $a = b$ ), lorsque les dimensions de l'ouverture varient de  $a = b = 0.5 \lambda$  à  $a = b = 20 \lambda$ .

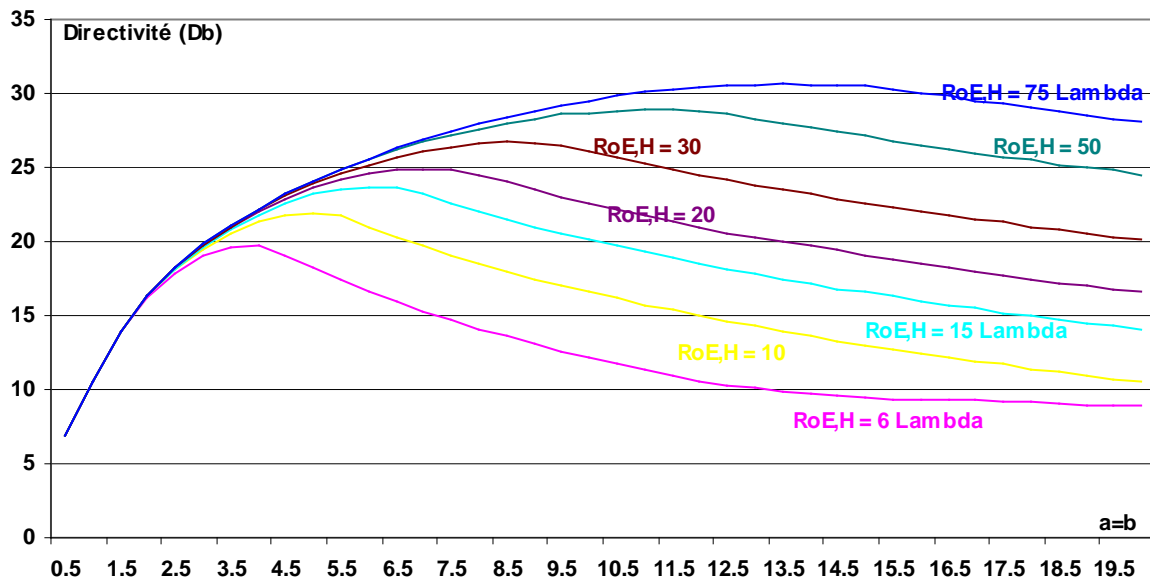


Figure XIV-18 : : Evolution de la directivité d'un cornet pyramidal ( $a = b$ ,  $\rho_E = \rho_H$ ) en fonction de la dimension  $a = b$  de l'ouverture, et pour différentes valeurs de  $\rho_E = \rho_H$ .

On repère chaque fois de manière nette l'existence d'un optimum, et c'est avec les dimensions correspondantes que le cornet doit être construit si on souhaite obtenir la directivité maximum.

Pour de larges ouvertures, l'approximation quadratique n'est plus valide, et des courbes plus précises peuvent être obtenues en considérant la phase vraie de chaque point de l'ouverture donnée par (XIV-31).

#### **IV – améliorations et autres types de cornets**

- Le cornet à lentille :

Afin de tendre vers le gain maximum réalisable, une lentille est quelquefois placée en sortie du cornet. Elle a pour rôle de compenser l'écart de phase pour obtenir en sortie un champ équiphase, et donc une directivité améliorée

- Le cornet à bords recourbés :

Afin de limiter la diffraction par les arêtes de l'ouverture du cornet, les bords peuvent être arrondis vers l'extérieur. On limite ainsi les perturbations du diagramme dues à la diffraction.

- Le cornet corrugué :

En corrugant convenablement les parois du cornet situées dans le plan E, on montre qu'on peut imposer des conditions aux limites analogues à celles du plan H, à savoir :

Plan H : Champ E tangentiel nul

Plan E : Champ E normal nul

Dans ces conditions, la distribution en amplitude du champ électromagnétique dans l'ouverture est pratiquement identique dans chaque plan. Il en résulte une identité des diagrammes de rayonnement, particulièrement utile si on souhaite générer de la polarisation circulaire.

- Le cornet conique :

Il peut présenter, par rapport au cornet pyramidal, des modes de fonctionnement propres aux guides circulaires.

Cette liste n'est pas exhaustive. Il existe un grand nombre de variantes qui peuvent en général être interprétées à l'aide des notions fondamentales exposées dans ce chapitre et de notions classiques d'électromagnétisme.